Bilinearform auf dem Tangentialraum $T_{(u,v)}X$.

<u>Definition:</u> Die lineare Abbildung

$$S_{(u,v)} : T_{(u,v)}X \ni \mathcal{U} \mapsto -DN_{(u,v)}\left((DX_{(u,v)})^{-1}\mathcal{U}\right) \in T_{(u,v)}X$$

des Tangentialraumes $T_{(u,v)}X$ in sich heißt die <u>Weingarten-Abbildung</u> der Fläche X.

Mit dieser Notation können wir schreiben

$$\mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = S_{(u,v)}(\mathcal{U})\cdot\mathcal{V}, \quad \mathcal{U},\mathcal{V}\in T_{(u,v)}X.$$

<u>Wie sieht die Fundamentalmatrix von $\mathrm{II}_{(u,v)}$ bzgl. (e_1, e_2) aus?</u> Es ist nach den Rechnungen zu Satz 6

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_2) = -N_u(u,v)\cdot X_v(u,v) =$$

$$-X_u(u,v)\cdot N_v(x,v) = \mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_2),$$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_1,e_1) = -N_u(u,v)\cdot X_u(u,v) =$$

$$N(u,v) \cdot X_{uu}(u,v) =: \mathcal{L},$$

$$\mathrm{II}_{(u,v)}(e_2, e_2) = -N_v(u,v) \cdot X_v(u,v) = N(u,v) \cdot X_{vv}(u,v) =: \mathcal{N}.$$

Setzt man noch

$$\mathcal{M} := -X_u(u,v) \cdot N_v(u,v) = N(u,v) \cdot X_{uv}(u,v),$$

so lautet die Fundamentalmatrix bzgl. (e_1, e_2)

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \hat{=} \mathrm{II} \ (\text{auf } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)}.$$

Man erhält dasselbe Resultat für die Fundamentalmatrix von II^{TX} bzgl. der Basis X_u, X_v im Tangentialraum. (Andere Notation: (e, f, g) statt $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$)

Nach Satz 4 passiert bei Transformation mit der Ersten Fundamentalform "nichts", außer dass man natürlich die Daten (Fußpunkt, eingesetzte

Vektoren) entsprechend transformiert. Bei II ist das nicht ganz so: Die Orientierung der Transformation spielt eine Rolle!

<u>Satz 7:</u> Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, φ sei eine <u>orientierungserhaltende</u> Parametertransformation $\tilde{\Omega} \to \Omega$, also $\det D\varphi > 0$. Ist $\tilde{\mathrm{II}}$ die zweite Fundamentalform von $\tilde{X} = X \circ \varphi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, so ist für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$(1) \quad \tilde{\mathrm{II}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = \mathrm{II}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\left(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{V}\right).$$

Entsprechend ist für $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{X}$ ($= T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}X$!)

$$(2) \quad \mathrm{II}^{T\tilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) = \mathrm{II}^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).$$

Ist B eine eigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^3$, also

$B = R + T$ mit einer Translation T und einer

Rotation R, für die $\det R = 1$ ist, so gilt

(3) $$\mathrm{II}^{T(B\circ X)}_{(u,v)}(R(U),R(V)) = \mathrm{II}^{TX}_{(u,v)}(U,V)$$

für alle $U, V \in T_{(u,v)}X$.

<u>Bemerkung:</u> Im Fall einer Bewegung B wie oben ist

$$T_{(u,v)}(B\circ X) = R(T_{(u,v)}X),$$

so dass links in (3) die richtigen Stellen eingesetzt werden.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch (1), so dass man sieht, wo

$\det D\varphi > 0$ eingeht. $\langle$ <u>Übung:</u> (2), (3) $\rangle$

Per Definition ist für $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\mathrm{II}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}),$$

wobei $\tilde{X} = X \circ \varphi$ ist und $\tilde{N}$ die Gauß-Abbildung von

$\tilde{X}$ bezeichnet, $\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}})(\tilde{u},\tilde{v}) / |\ldots\ldots|$.

In Satz 2 haben wir gezeigt

$$\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = \operatorname{sign} \det D\varphi(\tilde{u},\tilde{v})\, N(\varphi(\tilde{u},\tilde{v})),$$

so dass in unserem Fall gilt $\tilde{N} = N \circ \varphi$. Die Kettenregel liefert $D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{\mathfrak{u}}) = DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{\mathfrak{u}}))$

sowie $D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{\mathfrak{v}}) = DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{\mathfrak{v}}))$,

was nach Einsetzen sofort (1) ergibt. $\square$

<u>Beispiele für die Berechnung von II</u>:

1.) Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $C \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Mit $X : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto uA + vB + C$ hat man eine parametrisierte Ebene. Es ist $N(u,v) = \dfrac{A \times B}{|A \times B|}$ konstant, also $DN \equiv 0$ und damit $\mathrm{II} \equiv 0$.

2.) Wir parametrisieren $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ durch räumliche Polarkoordinaten

$$X(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ \sin u),$$

$u \in (-\pi/2, \pi/2)$, $0 < v < 2\pi$. Dann ist

$$X_u(u,v) = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u),$$

$$X_v(u,v) = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u \cdot \cos v & -\sin u \cdot \sin v & \cos u \\ -\cos u \cdot \sin v & \cos u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos v \cos^2 u, -\sin v \cos^2 u, -\sin u \cos u),$$

$$|X_u \times X_v| = (\cos^2 v \cos^4 u + \sin^2 v \cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2}$$

$$= (\cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2}$$

$$= (\cos^4 u + [1 - \cos^2 u] \cos^2 u)^{1/2} = \cos u,$$

$$N(u,v) = (-\cos v \cos u, -\sin v \cos u, -\sin u).$$

Gemäß $\quad \mathrm{II} \,\hat{=}\, \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$ und

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u) \cdot$$

$$\cdot (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$= \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 u \equiv 1,$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u)$$

$$\cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$= \cos v \sin u \cos u \sin v - \sin v \sin u \cos u \cos v \equiv 0,$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = -(\sin v \cos u, -\cos v \cos u, 0)$$

$$\cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$$

$$= \sin^2 v \cos^2 u + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u .$$

Also: $\quad \mathrm{II}_{(u,v)} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$ (bzgl. Basis e_1, e_2 in $\mathbb{R}^2$)

Es ist $\quad \mathrm{I}_{(u,v)} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ mit

$$\mathcal{E} = |X_u|^2 = 1, \quad \mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0 \text{ und}$$

$$\mathcal{G} = |X_v|^2 = \cos^2 u ,$$

so dass gilt: $\quad \mathrm{II}_{(u,v)} = \mathrm{I}_{(u,v)} .$

Hat die Sphäre den Radius $R>0$, so folgt

$$\mathrm{II}_{(u,v)} = \frac{1}{R}\,\mathrm{I}_{(u,v)}$$

3.) Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $X(u,v) = (u,v,f(u,v))$ die zugehörige Graphenfläche. Wir wissen

$$\mathcal{E} = 1+f_u^2\,,\quad \mathcal{F} = f_u f_v\,,\quad \mathcal{G} = 1+f_v^2\,,$$

$$N = (-f_u,-f_v,1)\Big/\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,,$$

$$\mathcal{L} = N\cdot X_{uu} = f_{uu}\Big/\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\,,$$

$$\mathcal{M} = N\cdot X_{uv} = f_{uv}\Big/\sqrt{\cdots\cdots}\,,$$

$$\mathcal{N} = N\cdot X_{vv} = f_{vv}\Big/\sqrt{}\,,$$

wobei man $1+f_u^2+f_v^2$ ersetzt durch $\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2$.

Damit folgt: $\quad (D^2 f = \text{Hesse-Matrix von } f)$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\,D^2 f\,.$$

(Formel für Graphenflächen)

4.) ⟨<u>Übung</u>⟩ Torus, Rotationsfläche

$\square$

Bevor wir die Zweite Fundamentalform geometrisch interpretieren, noch ein Nachtrag zur Weingarten-Abbildung

$$S_w : T_w X \to T_w X, \quad w = (u,v) \in \Omega,$$

$$S_w(U) := -DN_w\left(DX(w)^{-1} U\right)$$

der parametrisierten Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$. <u>Die Symmetrie von II_w ist nämlich äquivalent zur Selbstadjungiertheit von S_w</u>, denn

$$II_w^{TX}(U,V) = II_w^{TX}(V,U) \quad \forall\, U,V \in T_w X$$

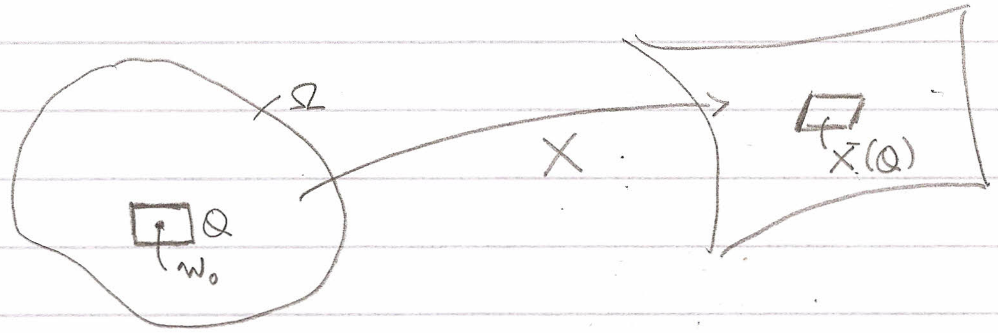
heißt ja gerade

$$S_w(U) \cdot V = S_w(V) \cdot U.$$

Um noch eine weitere geometrische Bedeutung von II zu beleuchten; überlegen wir uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung, dass

$$A_\Omega(X) = \int_\Omega |X_u \wedge X_v| \, du\, dv$$

ein vernünftiges Maß für den Flächeninhalt der parametrisierten Fläche ergibt, vorausgesetzt $\int_\Omega \ldots < \infty$.



Man überdeckt Ω möglichst fein mit kleinen Quadraten und ersetzt X auf $Q = Q(w_0)$ durch $(u,v) \longmapsto$ $(u-u_0)X_u(w_0) + X_v(w_0)\cdot(v-v_0) + X(w_0)$. Aus Q wird ein Parallelogramm mit dem Inhalt

$$|X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \cdot |Q(w_0)| .$$

Der Flächeninhalt von $X(\Omega)$ ist dann in guter Näherung

$$\sum_{Q(w_0)} |X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \, |Q(w_0)| \longrightarrow \int_\Omega |X_u \times X_v| \, du\, dv,$$

wobei die Konvergenz „$\longrightarrow$" bedeutet, dass die Zerlegung von

Ω immer feiner werden soll. Das Ergebnis lautet daher:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Flächeninhalt von } X(\Omega) = \\ &\int_\Omega \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2}\, du\, dv = \\ &\int_\Omega \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\, du\, dv = \int_\Omega \sqrt{\det G}\, du\, dv\end{aligned}}$$

Hierin ist $G = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ die Matrix von I bzgl. der Basis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$. Zusammen mit der Rechnung von p. 138 sieht man:

> Die <u>Erste Fundamentalform</u> I von X ist zuständig für die Messung von Längen und Flächeninhalten auf der Fläche X.

<u>Nun endlich zur geometrischen Bedeutung von II</u>: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ wie immer, $\varepsilon > 0$ und $\omega : [0, \varepsilon] \to \Omega$,